

用提升格式构造二次平均插值小波

曾剑芬 马争鸣

(中山大学电子系信息处理实验室, 广州 510275)

摘要 提升格式是小波研究的新热点. 提升格式的运用有两个不同的层次, 即用提升格式来实现已有的小波变换和构造新的小波. 首先用提升格式构造了二次平均插值小波, 并用构造出的小波对灰度图象做变换, 然后对变换后的系数采用最优比特率分配的方法来做编码, 取得了与 JPEG2000 推荐的 D9/7 双正交小波图象编码基本一致的结果. 但是, 二次平均插值小波的提升格式要比 D9/7 双正交小波的提升格式简单得多, 这意味着消耗的计算资源也少得多.

关键词 小波变换 提升格式 图象编码

中图法分类号: TN919.81 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2002)04-0369-06

Constructing Average Interpolating Wavelets Via Lifting Scheme

ZENG Jian-fen, MA Zheng-ming

(Information Processing Lab, Electronics Dept., Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract Lifting scheme, the new hotspot of wavelets research, can be used to implement the existent wavelets and to construct completely new wavelets. Seen from the theory of lifting scheme, any transform constructed by lifting scheme is some kind of generalized wavelet transform. What's more, many digital signals are from the integral average of analog signals over certain interval or area. Considering the above two facts, the concept of average interpolating is presented in this paper. The average interpolating wavelet of 2 degree is constructed and is applied to image coding. After the wavelet transform for image data, Optimal Bit Allocation, which combines embedded quantization and entropy coding of binary system arithmetic coding together, is applied to get an optimal coding result by reaching the least distortion with the expected bits number. Finally, an image coding result is got as good as, if not better than, that of the D9/7 recommended by JPEG2000 draft. The lifting steps of the average interpolating wavelet is much simpler than that of the commonly used D9/7, which means the computational resources consumed here is much less.

Keywords Wavelet, Lifting scheme, Image coding

0 引言

一般来说, 提升格式的基本过程有分割/合并、预测和更新, 如图1所示.

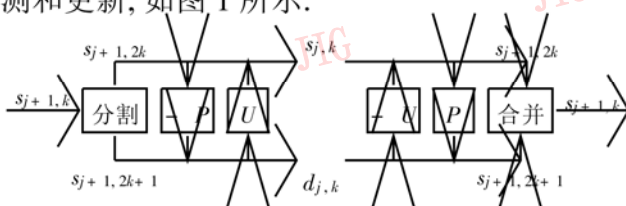


图1 提升格式

(1) 分割/合并

所谓分割, 就是要把信号 $s_{j+1,k}$ 分割成两个相互关联的部分. 通常采用“惰性”分割方法, 把信号 $s_{j+1,k}$ 分成奇偶两部分: $s_{j+1,2k}$ 和 $s_{j+1,2k+1}$. “惰性”分割方法充分利用了信号的局域相关性. 分割的逆过程是合并(Merge), 即由 $s_{j+1,2k}$ 和 $s_{j+1,2k+1}$ 恢复 $s_{j+1,k}$.

(2) 预测

所谓预测, 就是用偶部分 $s_{j+1,2k}$ 来预测奇部分 $s_{j+1,2k+1}$. 如果 $P[\cdot]$ 表示预测算子, 则预测误差为: $d_{j,k} = s_{j+1,2k+1} - P[s_{j+1,2k}]$. 预测过程是可逆的, 即由

$s_{j+1,2k}$ 、 $d_{j,k}$ 和 $P[\cdot]$ 可以恢复 $s_{j+1,2k+1}$:

$$s_{j+1,2k+1} = d_{j,k} + P[s_{j+1,2k}]$$

(3) 更新

所谓更新,就是要用预测误差 $d_{j,k}$ 来更新偶部分 $s_{j+1,2k}$. 如果 $U[\cdot]$ 表示更新算子,则更新后的信号为: $s_{j,k} = s_{j+1,2k} + U[d_{j,k}]$. 同样地,更新过程也是可逆的,即由 $s_{j,k}$ 、 $d_{j,k}$ 和 $U[\cdot]$ 可以恢复 $s_{j+1,2k}$:

$$s_{j+1,2k} = s_{j,k} - U[d_{j,k}]$$

提升格式^[1-3]的运用具有两个不同的层次:

(1) 用提升格式来实现现有的小波变换

目前,现有的小波变换都是采用 Mallat 算法^[4]来实现的. 在 Mallat 算法中,信号经过卷积后,需按隔二取一的周期进行采样,这意味着,卷积运算中有一半是无用功. 而提升格式正是在这方面对 Mallat 算法进行了改进,从而得到 JPEG2000 的青睐^[5]. 必须指出的是,对现有的小波变换来说,提升格式只是一种实现方法. 信号经过小波变换后的性态,只取决于所使用的小波,而与采用什么方法来实现这个小波变换无关.

(2) 用提升格式来构造新的小波

从理论上来说,任何一种提升格式都对应着一个“广义”小波. 人们可以根据自己的需要,通过调整提升格式中的各个要素来构造新的小波. 用提升格式的始作俑者 Sweldens 的话来说就是“Building Your Own Wavelets at Home!”^[3].

目前,提升格式的运用大都集中在第1个层次上,即用提升格式来实现现有的小波变换. 其实,提升格式第2个层次的运用天地更宽,人们可以根据自己的需要来构造自己的小波.

1 提升格式与小波变换

1.1 提升格式与现有的小波变换

Daubechies 证明,所有用 Mallat 算法实现的小波变换都可以转用提升格式来实现^[6]. JPEG2000 给出了实现 D9/7 双正交小波变换的提升格式(图2):

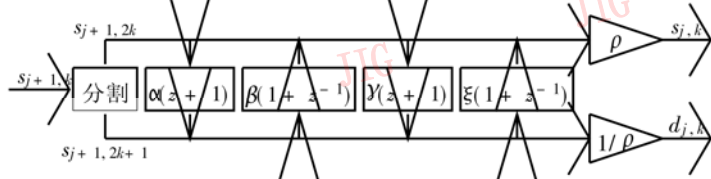


图2 D9/7 双正交小波变换(提升格式)

其中 $\alpha = -1.5861$, $\beta = -0.0530$, $\gamma = 0.8829$, $\xi = 0.4435$, $\rho = 1.230$ ^[5].

在构造平均插值小波变换时借助了 Haar 小波

变换. 用提升格式来实现 Haar 小波变换,只需在图1所示的框架中,把预测算子和更新算子设置为

$$P_{\text{Haar}}[s_{j+1,2k}] = s_{j+1,2k}, U_{\text{Haar}}[d_{j,k}] = \frac{d_{j,k}}{2}$$

这时有

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= s_{j+1,2k+1} - P_{\text{Haar}}[s_{j+1,2k}] = s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k} \\ s_{j,k} &= s_{j+1,2k} + U_{\text{Haar}}[d_{j,k}] = s_{j+1,2k} + \frac{d_{j,k}}{2} \\ &= \frac{s_{j+1,2k} + s_{j+1,2k+1}}{2} \end{aligned}$$

1.2 提升格式与广义小波变换

从提升格式的理论来说^[3],任何一种提升格式都对应着(或者说定义了)一个“广义”小波. 这个广义小波可以按照下面的步骤来确定:

(1) 设 $x_{0,0} < x_{0,1} < \dots < x_{0,K}$ 为实轴上 $K+1$ 个初始样本点,按照图3所示的算法无限加密这些样本点.

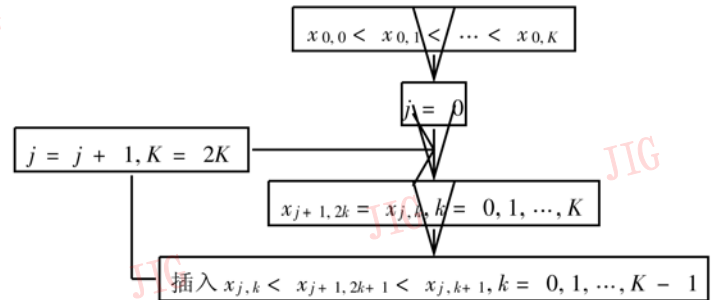


图3 样本点的加密

(2) 对于每一个样本点 x_{j_0,k_0} , $0 \leq k_0 \leq 2^{j_0}K$, $j_0 = 0, 1, 2, \dots$, 令 $s_{j_0,k} = \delta_{k-k_0} = \begin{cases} 1 & k = k_0 \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}$. 然后,利用提升格式的重构部分(见图1),按照图4所示的算法,不断产生新的样本值. 于是,当 $j \rightarrow \infty$ 时候,样本值 $s_{j,k}$ 的包络线所代表的函数就定义为与样本点 x_{j_0,k_0} 相关的尺度函数 $\varphi_{j_0,k_0}(x)$.

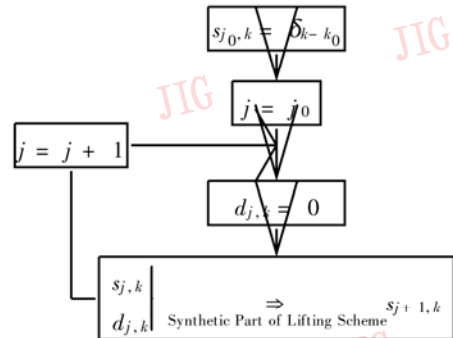


图4 提升格式中样本值的插值

(3) 对于每一个样本点 x_{j_0,k_0} , $0 \leq k_0 \leq 2^{j_0}K$, $j_0 = 0, 1, 2, \dots$, 令 $d_{j_0,k} = \delta_{k-k_0} = \begin{cases} 1 & k = k_0 \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}$, $s_{j_0,k} = 0$.

然后, 利用提升格式的重构部分(见图 1), 来得到新的样本值 $s_{j_0+1,k}$. 于是, 与样本点 x_{j_0,k_0} 相关的广义小波就定义为

$$\Psi_{j_0,k_0}(x) = \sum_k s_{j_0+1,k} \Phi_{j_0+1,k}(x)$$

注: 在实际应用中, 人们只需关注预测算子 $P| \cdot |$ 和更新算子 $U| \cdot |$ 的设置及其对信号变换的影响, 而不必考虑这样的设置会产生一个什么样的广义小波. 只要提升格式好用, 又何必麻烦去探究它背后的小波呢?

2 平均插值小波变换

2.1 平均插值的概念

平均插值的概念源于这样的事实, 即许多数字信号不是来源于模拟信号的采样, 而是来源于模拟信号在一个区间或一个区域上的积分平均值. 例如, 设 $f(x)$ 表示模拟信号. 则离散信号 $s_{j,k}$ 表示 $f(x)$ 在区间 $|\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}|$ 的积分平均值:

$$s_{j,k} = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(x) dx$$

而不是表示 $f(x)$ 在 $\frac{k}{2^j}$ 点的采样值.

平均插值的做法是先用一个 N 次多项式 $p(x)$, 在区间 $|\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}|$ 上逼近 $f(x)$, 其中, 多项式的系数可由下面的方程来确定:

$$s_{j,k+n} = 2^j \int_{\frac{k}{2^j} + \frac{n}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j} + \frac{n}{2^j}} p(x) dx, n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2}$$

然后, 利用 $p(x)$ 来预测 $f(x)$ 在半区间 $|\frac{k}{2^j} + \frac{2k+1}{2^{j+1}}|$ 和 $|\frac{2k+1}{2^{j+1}} + \frac{k+1}{2^j}|$ 上的积分平均值

$$s_{j+1,2k} = 2^{j+1} \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} p(x) dx$$

$$s_{j+1,2k+1} = 2^{j+1} \int_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+1}{2^j}} p(x) dx$$

2.2 二次平均插值小波变换

平均插值小波变换就是要用提升格式的形式来实现平均插值. 图 5 表示平均插值小波变换的重构部分.

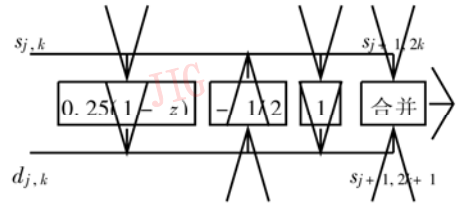


图 5 平均插值小波的提升格式(重构部分)

其中预测算子 $P_{\text{Al}}| \cdot |$ 的作用为

$$P_{\text{Al}}| s_{j,k} | = s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k}$$

于是, 当 $d_{j,k} = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{上线: } s_{j,k} - U_{\text{Harr}}| s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k} | \\ = s_{j,k} - \frac{1}{2}(s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k}) = s_{j+1,2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{下线: } s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k} + P_{\text{Harr}}| s_{j+1,2k} | \\ = s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k} + s_{j+1,2k} = s_{j+1,2k+1} \end{aligned}$$

这里, 只考虑二次平均插值小波变换, 则插值多项式为

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

其中, 系数由下面的方程来确定(在计算中, 设 $\frac{1}{2^j}$ 为一个单位), 即由

$$\begin{cases} s_{j,k-1} = \int_0^1 p(x) dx = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma \\ s_{j,k} = \int_1^2 p(x) dx = \frac{7}{3}\alpha + \frac{3}{2}\beta + \gamma \\ s_{j,k+1} = \int_2^3 p(x) dx = \frac{19}{3}\alpha + \frac{5}{2}\beta + \gamma \end{cases}$$

得

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1.8333 & -1.1667 & 0.3333 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,k-1} \\ s_{j,k} \\ s_{j,k+1} \end{vmatrix}$$

于是, 利用 $p(x)$ 可以预测信号在半区间精度上的积分平均值:

$$\begin{aligned} s_{j+1,2k} &= 2 \int_1^{1+\frac{1}{2}} p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{19}{12} & \frac{5}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \\ &= [0.125 \quad 1 \quad -0.125] \begin{vmatrix} s_{j,k-1} \\ s_{j,k} \\ s_{j,k+1} \end{vmatrix} \\ s_{j+1,2k+1} &= 2 \int_{1+\frac{1}{2}}^2 p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{37}{12} & \frac{7}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix} \\ &= [-0.125 \quad 1 \quad 0.125] \begin{vmatrix} s_{j,k-1} \\ s_{j,k} \\ s_{j,k+1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

得

$$P_{AI} | s_{j,k} | = s_{j+1,2k+1} - s_{j+1,2k}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,k-1} \\ s_{j,k} \\ s_{j,k+1} \end{vmatrix}$$

对于左边界点, 由:

$$s_{j+1,0} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.375 & -0.5 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,0} \\ s_{j,1} \\ s_{j,2} \end{vmatrix}$$

$$s_{j+1,1} = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{7}{12} & \frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.625 & 0.5 & -0.125 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,0} \\ s_{j,1} \\ s_{j,2} \end{vmatrix}$$

得

$$P_{AI} | s_{j,k} | = s_{j+1,1} - s_{j+1,0}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.75 & 1 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,0} \\ s_{j,1} \\ s_{j,2} \end{vmatrix}$$

而对于右边界点, 由:

$$s_{j+1,2M-2} = 2 \int_{\frac{1}{2}}^{2+\frac{1}{2}} p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{61}{12} & \frac{9}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.125 & 0.5 & 0.625 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,M-2} \\ s_{j,M-1} \\ s_{j,M} \end{vmatrix}$$

$$s_{j+1,2M-1} = 2 \int_{2+\frac{1}{2}}^3 p(x) dx = \begin{vmatrix} \frac{91}{12} & \frac{11}{4} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.125 & -0.5 & 1.375 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,M-2} \\ s_{j,M-1} \\ s_{j,M} \end{vmatrix}$$

得

$$P_{AI} | s_{j,k} | = s_{j+1,2M-1} - s_{j+1,2M-2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.25 & -1 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} s_{j,M-2} \\ s_{j,M-1} \\ s_{j,M} \end{vmatrix}$$

其中, M 为最右边的数据点序号.

表 1 列出了上述计算的结果.

表 1 $P_{AI}[\cdot]$ 的计算结果

	$s_{j,k-2}$	$s_{j,k-1}$	$s_{j,k}$	$s_{j,k+1}$	$s_{j,k+2}$
左边界($k=2$)	-0.75	1	-0.25		
非边界		-0.25	0	0.25	
右边界($k=M-2$)			0.25	-1	0.75

3 平均插值小波图象编码

平均插值小波图象编码属于小波图象编码. 小波图象编码由两部分组成: 一是图象的小波变换; 二是图象小波变换系数的编码(量化、非零量化系数大小和位置的表示、零值量化系数位置的表示、熵编码等).

首先对 Lena 图象(见图 6(a)) 和 Fruits 图象(见图 7(a)) 分别进行平均插值小波变换和 D9/7 双正交小波变换, 然后对变换系数进行编码, 比较两种小波变换的编码结果(表 2). 为了公平起见, 对图象的两种不同小波变换系数都采用同样的编码方法, 即所谓最佳比特分配编码方法^[7]. 这种编码方法先设定一个目标码率, 然后根据目标码率尝试各种比特分配方案, 从中选择峰值信噪比最大的比特分配方案. 在计算每一种比特分配方案的峰值信噪比时, 都要经过量化、量化系数的表示和算术编码等过程. 这种方法的源程序可以从网上下载 (<http://www.cs.dartmouth.edu/~gdavis/wavelet/wavelet.html>).

表 2 Lena 和 Fruits 图象的编码结果

		图象压缩比			
		8: 1	16: 1	32: 1	64: 1
Lena	D9/7 双正交小波(dB)	33.85	33.66	31.09	28.97
	二次平均插值小波(dB)	图 6(e)	图 6(d)	图 6(c)	图 6(b)
Fruits	D9/7 双正交小波(dB)	41.58	38.45	36.40	33.94
	二次平均插值小波(dB)	图 7(e)	图 7(d)	图 7(c)	图 7(b)

表 2 列出了 D9/7 双正交小波和二次平均插值小波对 Lena 图象和 Fruits 图象进行编码的结果. 从表 2 列出的数据可以看到, 二次平均插值小波图象编码的结果与 D9/7 双正交小波图象编码的结果基本一致. 但是, 从提升格式的角度来看, 二次平均插值小波变换的实现(见图 5) 却要比 D9/7 双正交小波变换的实现(见图 2) 简单得多, 这意味着节省了许多计算量.



(a) Lena 原图(512× 512, 8bpp)

(b) $Cr= 64, PSNR= 28. 20dB$

(c) $Cr= 32, PSNR= 31. 41dB$

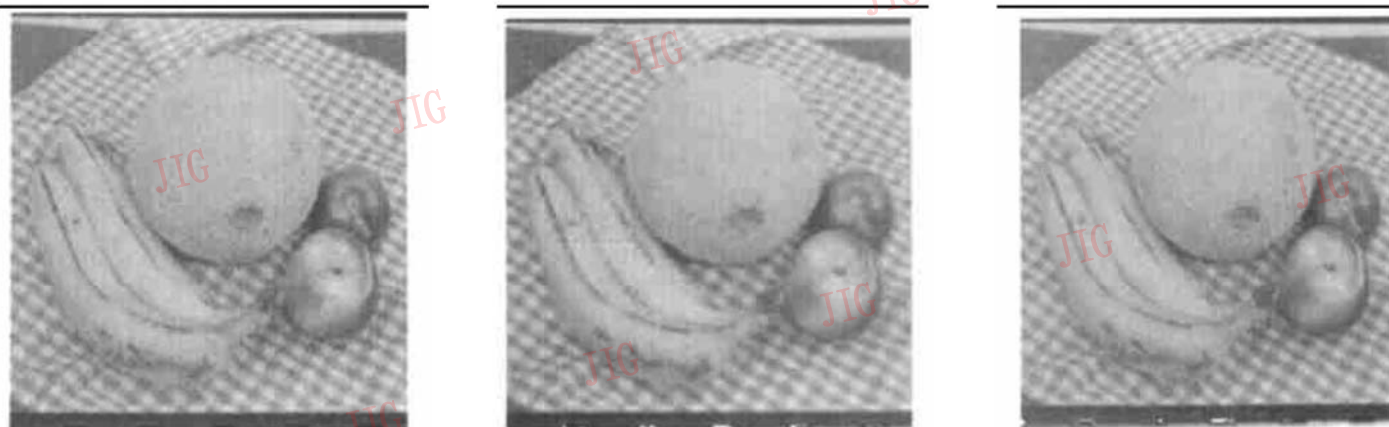


(d) $Cr= 16, PSNR= 33. 64dB$



(e) $Cr= 8, PSNR= 34. 45dB$

图 6 二次平均插值小波变换图象编码的结果



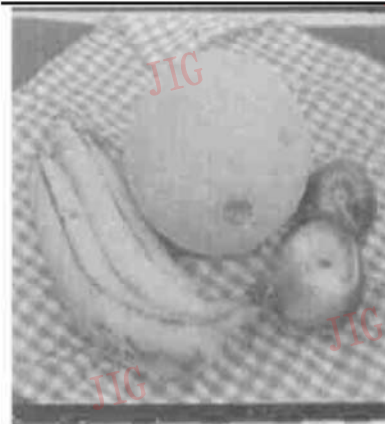
(a) Fruits 原图(512× 512, 8bpp)

(b) $Cr= 64, PSNR= 33. 15dB$

(c) $Cr= 32, PSNR= 35. 80dB$



(d) $Cr= 16, PSNR= 37. 74dB$



(e) $Cr= 8, PSNR= 40. 83dB$

图 7 二次平均插值小波变换图象编码的结果

4 结 论

(1) 提升格式是小波研究的新热点. 从理论研究来说, 提升格式大大拓展了小波的概念, 因而也就大大拓展了小波研究的范围. 从实际应用来说, 凡是用 Mallat 算法实现的小波变换都可以转用提升格式来实现, 而且至少节省一半的计算量. 因此, 尽管出道不久, 提升格式即被新的图象编码国际标准 JPEG2000 所选用.

(2) 提升格式的运用有两个不同的层次, 即用提升格式来实现已有的小波变换和用提升格式来构造新的小波. 从理论上来说, 任何一种提升格式都对应着(或者说定义了)一个小波. 本文给出了根据提升格式确定它所定义的小波的详尽过程. 不过, 对于从事实际应用的人们来说, 套用钱钟书的一句话: 只要提升格式好用, 又何必探究它背后的小波呢?

(3) 本文利用提升格式来实现二次平均插值, 也即用提升格式来构造二次平均插值小波, 然后把这样的小波应用于图象编码, 取得了与 JPEG2000 推荐的 D9/7 双正交小波图象编码基本一致的结果. 但是, 二次平均插值小波的提升格式要比 D9/7 双正交小波的提升格式简单得多, 这意味着其消耗的计算资源也少得多.

参 考 文 献

- 1 Wim Sweldens. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets[J]. SIAM J. Math. Anal., 1997, 29(2): 511~ 546.

- 2 Wim Sweldens. The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet construction[A]. Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, Proc. SPIE[C], 1995, 2569: 68~ 79.
- 3 Wim Sweldens, Peter Schroder. Building your own wavelets at home [R/OL]. Wavelets in Computer Graphics, ACM SIGGRAPH Course Notes, 1996, <http://cm.bell-labs.com/who/wim/>
- 4 Mallat S A. Theory for multiresolution signal decompositions: The wavelet representation[J]. IEEE Trans on PAMI, 1989, 11(7): 674~ 693.
- 5 FCD15444-1, JPEG2000 [S/OL], <http://www.jpeg.org/FCD15444-1.htm>
- 6 Ingrid Daubechies, Wim Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. J. Fourier Anal. Appl., 1998, 4(3): 247~ 269.



曾剑芬 1977年生, 中山大学通信与信息系统专业硕士研究生. 研究方向为多媒体数据处理与传输.



马争鸣 1957年生. 1989年获清华大学模式识别与智能控制专业博士学位, 现为中山大学电子系副教授. 主要学术兴趣为小波分析、分形几何和人工神经网络.